DEWANTARA. J. Tech., Vol. 02, No. 01 (Mei 2021), Hal. 06-13 E ISSN : 2776-6764
P ISSN : 2774-2032

Analisis Poisson Bracket dan Persamaan Hamilton-Jacobi pada Hukum Mekanika Klasik melalui Penerapan Transformasi Kanonik

Siti Fatimah-1[a*], Megastin M. Lumembang-2[b]

[a]Prodi Teknik Elektronika, Akademi Teknologi Industri Dewantara Palopo, Jalan K.H. Ahmad Razak 2 No. 7, Wara Selatan, Kota Palopo, Sulawesi Selatan, Indonesia
[b]Prodi Teknik Elektro, Universitas Kristen Indonesia Toraja, Jalan Nusantara No. 12, Makale, Tana Toraja, Sulawesi Selatan, Indonesia

**Email : stfatimah@atidewantara.ac.id*

Abstrak

Transformasi kanonik merupakan kesimetrian bentuk kanonis suatu objek fisik setelah dan sebelum dilakukan perubahan (transformasi). Besaran fisis yang digunakan dalam rumusan Hamilton yaitu jarak dan momentum. Dalam transformasi kanonik, terdapat empat fungsi pembangkit yang akan diaplikasikan dalam Poisson Bracket dan persamaan Hamilton-Jacobi yang nantinya akan menghasilkan transformasi kontak. Dari hasil penelitian menunjukkan bahwa penerapan transformasi kanonik pada Poisson Bracket dan persamaan Hamilton-Jacobi tidak mengubah arti perubah lama menjadi perubah baru. Perubah yang berkonjugasi secara kanonis pada penerapan transformasi kanonik dihubungkan dengan menggunakan Poisson Bracket sehingga kordinat lama dalam Hamilton juga disebut sebagai perubah berpasangan secara konjugat kanonis. Penggunaan fungsi pembangkit pada persamaan Hamilton tetap mengacu pada kordinat lama dan kordinat baru serta waktu sehingga aksi yang terjadi dinyatakan secara eksplisit terhadap fungsi waktu dan kordinat dengan meninjau lintasan awal saat t_1 pada posisi q_1. Penelitian ini dapat menjadi rujukan dalam penyederhanaan solusi umum persamaan Hamilton-Jacobi melalui transformasi kanonik pada hukum mekanika klasik.

Kata Kunci : *Poisson Bracket, Persamaan Hamilton-Jacobi, Mekanika Klasik, Transformasi Kanonik*

1. Latar Belakang

Alam seringkali tampak dalam bentuknya yang simetri. Bila ditinjau objek berbentuk bola misalnya, maka ia tampak sama ketika dilihat dari arah manapun. Secara umum dikatakan bahwa objek bola tampak sama sebelum dan sesudah transformasi rotasi dengan sembarang sumbu melewati titik pusatnya.

Dalam fisika, ide simetri ini muncul berkaitan dengan adanya sistem fisis atau objek yang simetri terhadap transformasi. Suatu sistem fisis atau objek dikatakan simetri, jika setelah dilakukan transformasi tertentu padanya, sistem fisis tersebut tampak sama sebagaimana sebelumnya[1]. Secara umum, simetri suatu objek menunjukkan sifat invariansinya dalam transformasi.

Hal yang menarik dari gagasan simetri ini adalah adanya besaran kekal (kekekalan) bagi sistem fisis yang memiliki simetri tertentu terhadap transformasi[1,2]. Dalam pembahasan ini, besaran fisis yang dimaksud adalah kordinat dan momentum. Rumusan Hamilton memiliki keuntungan lebih dari rumusan Lagrange sebagai dua variabel, yaitu jarak dan momentum masing-masing diberi status yang sama. Oleh karena itu, ketika Hamilton ditinjau dalam pergerakan konstan dan semua jarak berada dalam keadaan siklik, maka semua momentum bernilai konstan[3]. Namun transformasi dalam keadaan fungsi pembangkit akan menghasilkan nilai jarak dan momentum yang berbeda pula[4]. Hal ini akan lebih dalam dikaji mengingat bahwa besaran kekal (kekekalan) bagi sistem fisis yang memiliki simetri tertentu terhadap transformasi.

Dalam buku yang berjudul *Classical Mechanics-Analytical Dynamics* dalam bab *Canical Transformations* (Transformasi Kanonik) dibahas lebih lanjut mengenai fungsi yang ditransformasikan menjadi bentuk kanonik namun memiliki bentuk yang sama dari bentuk yang lama. Selain itu, aplikasi transformasi kanonik dalam persamaan Poisson Bracket dan Hamilton Jacoby serta penerapannya dalam berbagai masalah mekanika.

Tujuan dari laporan ini yaitu untuk mengetahui set koordinat yang semua koordinat siklik. Koordinat yang umum yang terjadi karena sifat dari masalah mungkin tidak siklik. Jadi kita harus mencari tahu prosedur tertentu untuk mengubah satu variabel tersebut ke dalam beberapa lain, yang mungkin lebih cocok untuk memecahkan persamaan mekanika klasik.

2. Metodologi

Transformasi Kanonik

Pilihan kordinat umum *q* sebenarnya tidak ada pembatasan dan *s* merupakan besaran tunggal yang menentukan kedudukan sistem dalam ruang[5]. Dalam hal ini persamaan Lagrange sama sekali tak bergantung pada pilihan koordinat, atau dengan kata lain persamaan Lagrange bersifat *invariant* (tak berubah) terhadap transformasi kumpulan $q_1, q_2, q_3, \ldots$ ke koordinat lain yang bebas $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$. Kumpulan koordinat Q yang baru ini adalah merupakan fungsi q yang secara eksplisit bergantung pula pada waktu *t* sehingga:

$$Q_i = Q_i\,(q,t)$$

yang dikenal sebagai *transformasi titik*

Karena persamaan Lagrange tak berubah dibawah transformasi titik, maka persamaan Hamilton juga demikian. Akan tetapi untuk persamaan Hamilton sesungguhnya dimungkinkan rangkuman yang lebih luas. Ini disebabkan karena dalam persamaan Hamilton, perlakuan terhadap momentum p juga merupakan perubah yang sama kedudukannya dengan koordinat *q*.

Oleh karena itu transformasi titik buat persamaan Hamilton, dapat diperluas hingga meliputi *2s* perubah bebas p dan q. Jadi kedua-duanya harus ditransformasikan menurut:

$$\begin{aligned} q_i &\Rightarrow Q_i = Q_i(q_i, p_i, t) \\ p_i &\Rightarrow P_i = P_i(q_i, p_i, t) \end{aligned} \qquad (1)$$

Mulai sekarang p dan P adalah momentum umum dan variabel Q dan P disebut variabel kanonik. Perluasan ini adalah merupakan keuntungan menggunakan sajian Hamilton. Akan tetapi tidak semua transformasi (1) dapat mempertahankan bentuk kanonik persamaan Hamilton.

Untuk keperluan ini, syarat yang harus dipenuhi sehingga persamaan gerak Hamilton dalam perubah baru Q, P, yakni bila ada fungsi Hamilton yang baru $K = K(Q,P,t)$ sehingga:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial Q}\frac{dQ}{dt} + \frac{\partial K}{\partial P}\frac{dP}{dt} \qquad (2a)$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}\ ;\ \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \qquad (2b)$$

Jika ini dipenuhi maka transformasi (1) disebut kanonik dan persamaan (2b) bisa diperoleh dari prinsip aksi.

Untuk merumuskan transformasi kanonik kita meninjau kembali prinsip variasi, yakni:

E ISSN : 2776-6764
P ISSN : 2774-2032

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_i p_i\dot{q}_i - H\right)dt = 0 \qquad (3)$$

yang pada uraian lalu telah digunakan menurunkan persamaan gerak Hamilton. Menurut keterangan di atas, variasi ini berlaku untuk sembarang system koordinat dan momentum. Oleh karena itu, buat perubah baru P dan Q juga harus memenuhi asas variasi pada persamaan (3) agar persamaan Hamilton (2b) dapat diturunkan dari:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_i P\dot{Q}_i - K\right)dt = 0 \qquad (4)$$

Kedua variasi (3) dan (4) hanya akan setara bila integrannya sama terlepas dari pada perbedaan dengan diferensial total suatu fungsi F terhadap koordinat, momentum dan waktu. Dengan demikian menurut uraian di atas, dari kedua persamaan (3) dan (4) haruslah dipenuhi syarat:

$$\lambda(p_i\dot{q}_i - H) = (P_i\dot{Q}_i - K) + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (5)$$

dimana : F adalah fungsi sembarang yang punya turunan kedua yang kontinu dan λ adalah konstanta skala yang selalu dapat dibuat sama dengan satu transformasi yang tepat. Bila hubungan antara P,Q dengan p,q sebagai P=μp, Q=νq dan K=μνH, maka:

$$\frac{\partial K}{\partial P} = \nu\frac{\partial H}{\partial p} = \nu q = Q$$

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = \mu\frac{\partial H}{\partial q} = -\mu p = -P$$

Transformasi skala bersifat kanonik jika:

$$p'\dot{q}'_i - H' = \mu\upsilon(p_i\dot{q}_i - H) \qquad (6a)$$

Karena itu selalu dipilih λ=1, maka:

$$p_i\dot{q}_i - H = P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} \qquad (6b)$$

Jadi setiap transformasi kanonik ditandai dengan suatu fungsi tertentu F yang disebut *fungsi generator transformasi.*

Fungsi Pembangkit

Hubungan antara bentuk lama dan baru dari Hamilton yaitu:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}$$

Dimana

$$F = F(q_{i,}p_i, Q_i, P_i, t)$$
$$Q_i = Q_i(q_{i,}p_i, t)$$
$$P_i = P_i(q_{i,}p_i, t)$$

Kordinat Q_i dan P_i mempunyai hubungan 2 variabel [4,6]. Maka fungsi F disebut sebagai fungsi pembangkit yang bergantung pada kordinat lama dan baru. Jelas bahwa F adalah fungsi dari 4 variabel $(q_{i,}p_i, Q_i, P_i)$ dan waktu (t). dari ke empat variable tersebut hanya 2 variabel yang bebas dan dua lainnya dihubungkan oleh transformasi persamaan

$$q_i \Rightarrow Q_i = Q_i(q_i, p_i, t)$$
$$p_i \Rightarrow P_i = P_i(q_i, p_i, t)$$

Karena F adalah fungsi dari kordinat baru dan lama, maka bentuk fungsi pembangkit lainnya yaitu:

i. $F_1 = F_1(q_{i\,,}Q_i, t)$ ketika $q_{i\,,}Q_i$ adalah variable bebas
ii. $F_2 = F_2(q_i\,, P_i, t\ )$) ketika $q_i\,, P_i$ adalah variable bebas
iii. $F_3 = F_3(p_i, Q_i, t\ )$) ketika p_i, Q_i adalah variable bebas
iv. $F_4 = F_4(p_i, P_i, t\ )$) ketika p_i, P_i adalah variable bebas

Empat fungsi pembangkit diatas akan menghasilkan transformasi kontak.

a. Fungsi Pembangkit dari $\boldsymbol{F_1 = F_1(q_{i\,,}Q_i, t)}$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} P_i\dot{Q}_i - K + \sum\left[\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}\right]$$

Sehingga kita dapat

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}\ ;\ P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}\ ;\ K = H + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (7)$$

Berdasarkan persamaan ini, maka kita dapat melihat bahwa F adalah merupakan fungsi dari perubah koordinat lama dan baru serta waktu; yakni $F = F(q,Q,t)$. Fungsi pembangkit ini dikenal sebagai *fungsi pembangkit jenis pertama* . Dengan demikian transformasi ini bersifat kanonik karena hubungan persamaan (7) dan fungsi pembangkit ini memenuhi persamaan transformasi dari Lagrangian, yakni:

$$L(q,\dot{q},t) = L'(Q,\dot{Q},t) + \frac{d}{dt}F(q,Q,t) \qquad (8)$$

b. Fungsi Pembangkit dari $\boldsymbol{F_2 = F_2(q_i\,, P_i, t)}$

Dari persamaan (7) kita tahu bahwa

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$$

Maka kita dapat menghubungkan F_1 dan F_2 menggunakan transformasi Legendre dengan hubungan:

$$F_2(q_i\,, P_i, t) = F_1(q_{i\,,} Q_i, t) + \sum_i P_i Q_i$$

Sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt}\left[F_2(q_i\,, P_i, t) - \sum_i P_i Q_i\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H = -\sum \dot{P}_i Q_i - K + \sum \left[\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial Q_i}\dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}\right]$$

Maka kita mendapatkan

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\ ;\ Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}; K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \qquad (9)$$

c. Fungsi Pembangkit dari $\boldsymbol{F_3 = F_3(p_i, Q_i, t)}$

Dari persamaan (9) kita mendapatkan

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$$

Maka kita dapat menghubungkan F_3 dengan F_1 menggunakan transformasi Legendre dengan hubungan

$$F_3(p_i, Q_i, t) = F_1(q_{i\,,} Q_i, t) - \sum p_i\, q_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt}\left[F_3(p_i, Q_i, t) + \sum p_i\, q_i\right]$$

$$-H = \sum P_i \dot{Q}_i - K + \sum \dot{p}_i q_i + \sum \left[\frac{\partial F_3}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial F_3}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F_3}{\partial t}\right]$$

Sehingga didapatkan

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}; P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}; K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \qquad (10)$$

d. Fungsi Pembangkit dari $\boldsymbol{F_4 = F_4(p_i, P_i, t)}$

Kita punya persamaan

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt}$$

Dari persamaan (7) dan (10) sebelumnya kita tahu bahwa

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$$

dan

$$P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$$

Sehingga kita dapat menghubungkan F_4 dengan F_1 menggunakan transformasi ganda Legendre dengan persamaan:

$$F_4(p_i, P_i, t) = F_1 - \sum p_i\, q_i + \sum P_i\, Q_i$$

Dengan

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt}$$

$$-H = -K + \sum \frac{\partial F_4}{\partial p_i}\dot{p}_i + \sum \frac{\partial F_4}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial F_4}{\partial t} + \sum \dot{p}_i q_i - \sum \dot{P}_i Q_i$$

Sehingga kita dapat

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}; Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}; K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \qquad (11)$$

Dari keempat fungsi pembangkit diatas, kita mendapatkan fungsi pembangkit persamaan kanonik, seperti dibawah ini.

Tabel 1. Fungsi Pembangkit Persamaan Kanonik

No.	$F_1(q,Q,t)$	$F_2(q,P,t)$	$F_3(p,Q,t)$	$F_4(p,P,t)$
1	$p=\frac{\partial F_1}{\partial q}$	$p=\frac{\partial F_2}{\partial q}$	$p=-\frac{\partial F_3}{\partial p}$	$p=-\frac{\partial F_4}{\partial p}$
2	$P=-\frac{\partial F_1}{\partial Q}$	$Q=\frac{\partial F_2}{\partial P}$	$P=-\frac{\partial F_3}{\partial Q}$	$Q=\frac{\partial F_4}{\partial P}$
3	$K=H+\frac{\partial F_1}{\partial t}$	$K=H+\frac{\partial F_2}{\partial t}$	$K=H+\frac{\partial F_3}{\partial t}$	$K=H+\frac{\partial F_4}{\partial t}$

3. Hasil dan Pembahasan

Poisson Bracket

Misalkan f(q,p,t) suatu fungsi terhadap koordinat, momentum dan waktu. Turunan totalnya terhadap waktu adalah:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k\right) \quad (12)$$

Dengan memasukkan harga $\dot{q}_k$ dan $\dot{p}_k$ dari persamaan Hamilton dapat dinyatakan :

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+[H,f] \quad (13a)$$

dengan

$$[H,f]=\sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right) \quad (13b)$$

Persamaan (13b) dikenal sebagai "*kurung Poisson*" (*Poisson Bracket*) besaran H dan f.

Kita melihat dari persamaan (13a), bila suatu besaran; katakanlah f disini merupakan integral gerak, maka df/dt=0. Ini berarti $\frac{\partial f}{\partial t}+[H,f]=0$. Kalau integral gerak itu tak bergantung secara eksplisit terhadap waktu, maka:

$$[H,f]=0 \quad (14)$$

yang menunjukkan bahwa kurung Poisson H dan f haruslah lenyap.

Sesuai dengan analogi persamaan (13b), maka kurung Poisson bagi besar g dan f didefinisikan berdasarkan sangkutan:

$$[g,f]=\sum_k\left(\frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k}-\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right) \quad (15)$$

Dapat pula ditunjukkan bahwa kurung Poisson memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

$$[g,f]=-[f,g] \quad (16)$$

$$[f,C]=0\,,\ C\ \textit{suatu tetapan} \quad (17)$$

$$[f_1+f_2,g]=[f_1,g]+[f_2,g] \quad (18)$$

$$[f_1f_2,g]=f_1[f_2,g]+f_2[f_1,g] \quad (19)$$

Persamaan (15) diambil turunan parsialnya terhadap waktu, maka akan:

$$\frac{\partial}{\partial t}[f,g]=\left[\frac{\partial f}{\partial t},g\right]+\left[f,\frac{\partial g}{\partial t}\right] \quad (20)$$

Jika salah satu dari f atau g adalah koordinat atau momentum, maka dipenuhi sangkutan:

$$[f,q_k]=\frac{\partial f}{\partial p_k} \quad (21)$$

$$[f,p_k]=-\frac{\partial f}{\partial q_k} \quad (22)$$

Dengan menggunakan persamaan (VI.3.10) dan (VI.3.11), maka dapat pula ditunjukkan bahwa:

$$[q_i,q_k]=[p_i,p_k]=0\ ;[p_i,q_k]=\delta_{ik} \quad (23)$$

Selanjutnya perubahan p dan q dalam sajian Hamiltonian sering disebut perubah yang berpasangan secara *konjugat kanonis*. Syarat yang menghubungkan perubah yang berkonjugasi secara kanonis adalah kurung Poisson. Dalam hubungan ini jika $[f,g]_{pq}$ merupakan kurung Poisson bagi besaran f dan g terhadap p dan q. Sementara $[f,g]_{P,Q}$ sebagai kurung Poisson bagi besaran yang sama terhadap sebagai kurung Poisson bagi besaran yang sama terhadap peubah P,Q, maka akan dipenuhi hubungan, yakni:

$$[f,g]_{p,q} = [f,g]_{P,Q} \qquad (24)$$

Hal ini dapat ditunjukkan secara langsung dengan menggunakan transformasi (9). Dalam hal ini:

$$\begin{aligned}[f,g]_{P,Q} &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial g}{\partial Q_i} - \frac{\partial f}{\partial Q_i}\frac{\partial g}{\partial P_i} \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial P_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial P_i} \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} \right)\left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_i}\frac{\partial p_i}{\partial P_i} \right)\end{aligned} \qquad (25)$$

Bahwa persamaan (24) dipenuhi, tinggal menunjukkan bahwa $\left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_i}\frac{\partial p_i}{\partial P_i} \right)$=1.

Ini dapat diperlihatkan karena menurut persamaan (9), $\frac{\partial p_i}{\partial P_i} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P_i \partial q_i}$ *dan* $\frac{\partial Q_i}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P_i \partial q_i}$ sehingga nyata $\left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_i}\frac{\partial p_i}{\partial P_i} \right)$=1. Karena dipenuhinya rumus (23) dan (24) , maka juga berlaku:

$$[Q_i, Q_k]_{p,q} = [P_i, P_k]_{p,q} = 0$$

$$[Q_i, P_k]_{p,q} = \delta_{ik} \qquad (26)$$

Inilah syarat yang harus dipenuhi suatu transformasi $p,q \Rightarrow P,Q$ bila dinyatakan dalam kurung Poisson *bersifat kanonik*

Persamaan Hamiltonian Jacoby

Pada uraian Poisson Bracket, besaran aksi telah diketahui sebagai fungsi dari koordinat dan waktu. Dalam hal ini, menurut persamaan integral aksi, perubahan aksi dari suatu lintasan ke lintasan lain yaitu:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t \right) dt \qquad (27a)$$

Dan jika Lagrangian tidak bergantung waktu secara eksplisit, maka $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ sehingga:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} \right) dt \qquad (27b)$$

Karena prinsip Hamilton menyatakan bahwa " *perubahan system dari keadaan t_1 ke keadaan t_2 yang membuat integral aksi stasioner/ekstremum"* [7,8], sehingga:

$$0 = \delta I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right\} \delta q_i dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q \Big|_{t_1}^{t_2} \qquad (28)$$

Jika pada suku ke 2 (dua) pada ruas kanan, dengan mengambil $\delta q(t_1) = 0$ dan menandai $\delta q(t_2) = \delta q$ dan mengganti $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p$, maka diperoleh $\delta I = p\delta q$. Jadi terlihat bahwa turunan parsial aksi terhadap koordinat adalah merupakan momentum, yaitu:

$$\frac{\partial I}{\partial q} = p \qquad (29)$$

Dengan demikian aksi dapat dipandang secara eksplisit merupakan fungsi waktu dan koordinat dengan meninjau lintasan yang bermula pada saat t_1 pada kedudukan q_1. Jadi

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q}\dot{q} = \frac{\partial I}{\partial t} + p\dot{q} \qquad (30)$$

Selanjutnya dari aksi diperoleh $\frac{dI}{dt} = L$, maka:

$$L = \frac{\partial I}{\partial t} + p\dot{q} \text{ atau } \frac{\partial I}{\partial t} = L - p\dot{q} \qquad (31)$$

Disisi lain $H(q_i, p_i; t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i; t)$, maka akan diperoleh persamaan buat aksi I(q,t) yang ditentukan oleh:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + H(q, p; t) = 0 \qquad (32)$$

Sementara $\frac{\partial I}{\partial q} = p$, maka dengan mengganti dari dalam Hamiltonian diperoleh:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \; q_n, \frac{\partial I}{\partial q_1}, \frac{\partial I}{\partial q_2}, \; , \; . \; . \; . \; , \frac{\partial I}{\partial q_n}; t \right) = 0 \qquad (33)$$

yang menentukan besaran aksi I(q,t). Persamaan diferensial parsial orde satu terhadap waktu ini dikenal sebagai *persaman Hamilton-Jacobi*. Seperti halnya persamaan Lagrange dan persamaan kanonik Hamilton, maka juga persamaan Hamilton-Jacobi adalah merupakan adalah basis dalam menentukan metode umum mengintegralkan persamaan gerak.

Sebelum mengupas metode di atas, perlu dikemukakan kenyataan bahwa setiap persamaan diferensial parsial orde satu memiliki penyelesaian yang hanya bergantung pada satu fungsi sembarang. Dalam penerapan mekanisme integral umum persamaan Hamilton-Jacobi kurang penting dibanding dengan integral lengkap, yang mengandung tetapan bebas sebanyak perubah bebas.

Untuk perubah bebas dalam persamaan Hamilton-Jacobi terdiri atas *perubah waktu* dan *koordinat* . Untuk system dengan *n* buah derajat kebebasan, integral lengkapnya hruslah mengandung *n+1* buah tetapan integrasi. Karena fungsi aksi I terpaut dalam persamaan melalui turunan, maka satu diantara tetapan itu haruslah bersifat menjumlah, sehingga integral lengkap persamaan Hamilton-Jacobi akan dapat disajikan sebagai:

$$I = f\left(q_1, q_2, ..., q_{n;}; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; t\right) \qquad (34)$$

Untuk menentukan hubungan integral lengkap persamaan Hamilton-Jacobi dengan penyelesaian persamaan gerak yang dicari, maka dalam transformasi kanonik dari perubah p,q ke perubah yang baru, kita pilih f(t,q,α) sebagai fungsi generator dengan α_1, …,$\alpha_n$sebagai perubah momentum baru. Misalkan koordinat baru itu adalah β_1,…, β_n , dan mengingat fungsi generator adalah merupakan fungsi koordinat lama dengan momentum baru, maka:

1). $p_i = \dfrac{\partial f}{\partial q_i}$

2) $\beta_i = \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_i}$

3) $H' = H + \dfrac{\partial f}{\partial t}$

Akan tetapi karena f juga mengikuti persamaan Hamilton-Jacobi, maka Hamiltonian baru $H' = H + \dfrac{\partial f}{\partial t} = H + \dfrac{\partial I}{\partial t} = 0$. Ini berarti $H' = 0$, akibatnya $\dot{\alpha}_i = -\dfrac{\partial H'}{\partial \beta_i} = 0$, $\dot{\beta}_i = \dfrac{\partial H'}{\partial \alpha_i} = 0$, sehingga α_i=tetap, β_i=tetap.

Selanjutnya persamaan Hamilton-Jacobi akan mengambil bentuk yang lebih sederhana bila H tidak bergantung pada waktu secara eksplisit; yaitu bila system konservatif. Ketergantungan aksi terhadap waktu ditentukan oleh suku –Et, sehingga aksi akan dapat dinyatakan sebagai:

$$I(q,t) = I_0(q) - Et \qquad (35)$$

yang dikenal sebagai *solusi umum persamaan Hamilton-Jacobi.*

4. Kesimpulan

Transformasi kanonik tidak mengubah arti perubah lama ke perubah baru baik dalam fungsi pembangkit, Poisson Bracket maupun dalam persamaan Hamilton. Untuk menentukan hubungan integral lengkap persamaan Hamilton-Jacobi dengan menyelesaikan persamaan gerak yang dicari, maka dalam transformasi kanonik dari perubah lama ke perubah yang baru. Persamaan Hamilton-Jacobi akan mengambil bentuk yang lebih sederhana bila Hamilton (H) tidak bergantung pada waktu secara eksplisit yaitu bila system konservatif. Pada kordinat lama dalam Hamilton sering juga disebut perubah yang berpasangan secara konjugat kanonis yang penghubung perubahnya adalah kurung Poisson (*Poisson Bracket*).

Daftar Pustaka

[1] Eqab M. R., Tareq S. A., On Hamiltonian Formulation of Non-Conservative System, Turk. J. Phy. 28, 213-221, 2004.

[2] Haider, A. B., Timi, F. H., Eliyas, K., Ashikur, R., Representation of Hamiltonian Formalism in Dissipative Mechanical System, App. Math. Sci., 4(19), 931-942, 2010.

[3] Smith, C.E., Lagrangians and Hamiltonians with Friction, J. Phy. IOP Pub., 237, 1-6, 2010.

[4] Bibik, Y. V., Application of Satatistical Mechanics to the Analysis

of Lotka-Voltera System with Four Additonal Factors, App. Math. Sci., 7(112), 5577-5590, 2013.

[5] Eti, N., Classical and Quantum Euler Equation: A Thesis Submitted to the Graduate School of Engineering and Sciences of Izmir Institute of Technology in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Sciences in Mathematics, Izmir, 2007.

[6] Petalidou, P., Damianou, A., Fani, On the Liouville Integrability of Lotka-Voltera Systems, Front. Phy., 2(50), 1-10, 2014.

[7] Murthy, M.V.N. Classical Dynamics: Introduction. Chennai: Chennai Mathematical Institute, 2005.

[8] Hairer, E., Hamiltonian Systems: In Geometric Numerical Integration, Lubich & Wanner Hairer, Munchen: Springer Verlag, 2010.