DEWANTARA. J. Tech., Vol. 02, No. 02 (November 2021), Hal. 47 - 52 E ISSN : 2776-6764
P ISSN : 2774-2032

Persamaan Medan Einstein Efektif untuk Ruang-Waktu 5D Kaluza-Klein

Muh. Fachrul Latief [a,b] *, A. Indra Wulan Sari Ramadani [a]

[a] Prodi Fisika, Jurusan Fisika, FIMPA, Universitas Negeri Gorontalo,
[b] Laboratorium Teori Fisika Komputasi, UNG,
Jalan Prof. Dr. Ing B.J. Habibie, Desa Moutong Kec. Tilongkabila, Kab. Bone Bolango, Gorontalo, Indonesia

**Email : muh.fachrul@ung.ac.id*

Abstrak

Dalam studi ini, telah ditelaah kembali persamaan medan Einstein yang efektif untuk ruang-waktu 5D dalam teori Kaluza Klein. Teori Kaluza-Klein merupakan teori yang menggabungkan gaya gravitasi dengan gaya elektromagnetik secara klasik dalam dimensi ruang-waktu (*4d + 1*). Studi lebih difokuskan pada perumusan medan Einstein untuk metrik Kaluza-Klein, ungkapan simbol Christoffel yang tidak bernilai nol, ungkapan tensor Ricci yang tidak nol, ungkapan kelengkungan skalar dari geometri ruang-waktu 5D, serta ungkapan tensor Einstein untuk ruang-waktu 5D. Penjabaran ini dibatasi sampai pada kasus vakum yang dapat direduksi menjadi persamaan medan Einstein 4D sehingga memberikan makna fisis. Hasil yang diperoleh merupakan tinjauan klasik, yakni adanya kelengkungan ruang-waktu akibat hadirnya kopling antara medan elektromagnet dan medan skalar terhadap gravitasi yang dijelaskan melalui persamaan medan Einstein. Yang di mana medan elektromagnetik juga bergantung pada medan skalarnya.

Kata Kunci : *Persamaan Medan Einstein, Metrik Kaluza-Klein, Simbol Christoffel, tensor Ricci*

1. Latar Belakang

Pada tahun 1915, Albert Einstein secara brilian membangun teori relativitas umum, khususnya persamaan medan Einstein yang menghubungkan geometri dari ruang waktu dengan distribusi materi yang ada di dalamnya [1]. Persamaan ini pertama kali diterbitkan oleh Einstein dalam bentuk persamaan tensor, di mana menghubungkan kelengkungan ruang dan waktu lokal terhadap energi-momentum lokal di dalam kelengkungan ruang-waktu tersebut. Selain itu, ungkapan persamaan Maxwell yang diperluas ke dalam geometri ruang-waktu melengkung memberikan kerangka berpikir untuk menggabungkan gaya gravitasi (diwakili persamaan medan Einstein) dengan gaya elektromagnet (diwakili persamaan Einstein-Maxwell). Ide brilian ini lahir pada tahun 1921 oleh Theodor Kaluza yang memperkenalkan wawasan tentang alam semesta yang terdiri lebih dari 4 dimensi, di mana manifold 5D dapat digunakan untuk menyatukan teori relativitas umum Einstein dengan teori elektromagnetik dari Maxwell [2]. Esensi dari hipotesis tersebut bersifat khusus dari tensor metrik pada dimensi kelima, yakni terdapatnya medan skalar yang tidak dikenal dan biasa disebut dengan dilaton. Selanjutnya, pada tahun 1926, Oskar Klein memperkenalkan hipotesis bahwa dimensi kelima melengkung dan bersifat mikroskopis dan untuk menjelaskan kondisi tersebut, maka diperlukan syarat silinder. Klein menyarankan bahwa geometri dimensi kelima ekstra dapat berbentuk lingkaran dan memberikan kontribusi pada teori klasik dengan menyediakan metrik 5D yang dapat dinormalisasi. Selain itu, Klein juga memberikan sebuah interpretasi quantum dari manifold 5D yang diperkenalkan oleh Kaluza yang bersesuaian dengan asas ketidakpastian Heisenberg dan Persamaan Schrodinger [3,4].

Berbagai modifikasi skema untuk 5D untuk hipotesis Kaluza, termasuk ide Klein [3,5] untuk memadatkan dimensi ekstra telah ditelaah oleh beberapa ilmuan seperti Jordan, Bergmann, dan beberapa lainnya [5-11] selama bertahun-tahun, tetapi tidak diperluas dan hanya dibatasi untuk kasus 5D yang disertai dengan teori penggabungan gaya interaksi nuklir kuat dan lemah yang telah dikembangkan. Pertanyaan yang jelas adalah apakah gaya-gaya baru ini dapat disatukan dengan gravitasi dan elektromagnetisme dengan metode yang sama dalam ruang-waktu 5D tersebut. Namun pada tahun 1963, De Witt memperluas kasus ini ke dalam wawasan yang lebih kompleks dan lebih rumit dengan memperkenalkan simetri gauge (*gauge symmetry*) sebagai simetris dari ruang-waktu serta kehadiran dari medan elektromagnet sebagai vektor medan gauge (*gauge field*) dalam 4D [12]. De Witt adalah orang pertama yang menyarankan penggabungan kelompok pengukur SU(2) non-Abelian dari Yang dan Mills ke dalam teori Kaluza-Klein dimensi (*4 + d*). Hal ini jleas memerlukaan minimal tiga dimensi tambahan. Untuk kasus ini telah ditelaah oleh orang lain [13-15] dan diselesaikan sepenuhnya pada saat Cho dan Freund [16,17] pada tahun 1975. Pengamatan yang dilakukan oleh Temurbek Mirzaev, dkk. Memperoleh sifat optik lubang hitam yang berotasu dalam teori Kaluza-Klein yang dijelaskan oleh massa total, putaran, dan muatan listrik dan magnet. Selain itu, bayangan lubang hitam Kaluza-Klein yang diperoleh tidak dapat dibedakan dari pengamatan lubang hitam Kerr [18]. Dengan demikian, penulis menelaah kembali persamaan medan Einstein untuk metrik 5D Kaluza-Klein dengan mengkopling medan elektromagnetik dan medan skalar dengan gravitasi secara klasik.

2. Perumusan Medan Einstein untuk Metrik Kaluza-Klein

Pertama, perlu ditinjau anzast untuk teori Kaluza-Klein dalam bentuk tensor metrik kovarian diberikan oleh persamaan:

$$\tilde{g}_{ab} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{\mu\nu} & \tilde{g}_{5\nu} \\ \tilde{g}_{5\nu} & \tilde{g}_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{\mu\nu} + \psi A_\mu A_\nu & \psi A_\nu \\ \psi A_\nu & \psi \end{bmatrix} \quad (1)$$

Sedangkan dalam bentuk kontravariannya adalah

$$\tilde{g}^{ab} = \begin{bmatrix} \tilde{g}^{\mu\nu} & \tilde{g}^{5\nu} \\ \tilde{g}^{5\nu} & \tilde{g}^{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{\mu\nu} & -A^\nu \\ -A^\nu & A^2 + \frac{1}{\psi} \end{bmatrix} \quad (2)$$

dengan asumsi bahwasanya $\frac{\partial \tilde{g}_{ab}}{\partial x^5} = 0$. Hal ini mengindikasikan bahwasanya tidak ada medan yang bergantung pada dimensi kelima. Sehingga semua turunan akan bernilai nol.

Dalam persamaan (1) di atas, bentuk $\tilde{g}_{\mu\nu}$ merepresentasikan metrik dalam ruang-waktu 5D, sedangkan $g_{\mu\nu}$ merepsentasikan metrik standard dalam ruang-waktu 4D. Di mana metrik 5D merupakan kompaktifikasi ruang-waktu 4D dengan potensial vektor elektromagnet (A^μ). Metrik 5D mempunyai 15 komponen, dimana 10 komponen dari ruang waktu 4D, sebuah koordinat tambahan yang dikenal sebagai koordinat internal dalam aplikasi fisika partikel, tensor Ricci 5D, kelengkungan skalar Ricci 5D, tensor Einstein 5D, dan sebuah bentuk dari waktu Kaluza-Klein pada keadaan vakum ($\tilde{G}_{ab} = 0$).

Selanjutnya, diperlukan simbol Christoffel dari persamaan (1) yang tidak nol. Komponen Crishtoffel jenis kedua diungkapkan dengan persamaan

E ISSN : 2776-6764
P ISSN : 2774-2032

$$\tilde{\Gamma}^{a}_{bc} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{ad}\left[\frac{\partial \tilde{g}_{bd}}{\partial x^{c}} + \frac{\partial \tilde{g}_{cd}}{\partial x^{b}} - \frac{\partial \tilde{g}_{bc}}{\partial x^{d}}\right] \quad (3)$$

Komponen-komponen simbol Christoffel jenis kedua yang tidak nol adalah

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{5}_{55} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{5d}\left[\frac{\partial \tilde{g}_{5d}}{\partial x^{5}} + \frac{\partial \tilde{g}_{5d}}{\partial x^{5}} - \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^{d}}\right] = \frac{1}{2}A^{\nu}\partial_{\nu}\psi \\
\tilde{\Gamma}^{5}_{5\nu} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{5d}\left[\frac{\partial \tilde{g}_{5d}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \tilde{g}_{\nu d}}{\partial x^{5}} - \frac{\partial \tilde{g}_{5\nu}}{\partial x^{d}}\right] \\
&= \frac{1}{2}A^{\alpha}\psi F_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}A^{\alpha}A_{\nu}\partial_{\alpha}\psi + \frac{1}{2\psi}\partial_{\nu}\psi \\
\tilde{\Gamma}^{5}_{\alpha\nu} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{5\beta}\left(\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \tilde{g}_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}}\right) + \\
&\qquad \frac{1}{2}\tilde{g}^{55}\left(\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha 5}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \tilde{g}_{\nu 5}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x^{5}}\right) \\
&= -A_{\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}A^{\beta}A_{\nu}\psi F_{\beta\alpha} + \\
&\qquad \frac{1}{2}A^{\beta}A_{\alpha}\psi F_{\beta\nu} + \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}A_{\nu} + \partial_{\nu}A_{\alpha}) + \\
&\qquad \frac{1}{2\psi}(A_{\nu}\partial_{\alpha}\psi + A_{\alpha}\partial_{\nu}\psi) + \\
&\qquad \frac{1}{2}A_{\alpha}A^{\beta}A_{\nu}\partial_{\beta}\psi) \\
\tilde{\Gamma}^{\nu}_{55} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{\nu d}\left[\frac{\partial \tilde{g}_{5d}}{\partial x^{5}} + \frac{\partial \tilde{g}_{5d}}{\partial x^{5}} - \frac{\partial \tilde{g}_{55}}{\partial x^{d}}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\nu}\partial_{\alpha}\psi \\
\tilde{\Gamma}^{\nu}_{5\alpha} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{\nu\mu}\left[\frac{\partial \tilde{g}_{5\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\mu}}{\partial x^{5}} - \frac{\partial \tilde{g}_{5\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right] + \\
&\qquad \frac{1}{2}\tilde{g}^{\nu 5}\left[\frac{\partial \tilde{g}_{55}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha 5}}{\partial x^{5}} - \frac{\partial \tilde{g}_{5\alpha}}{\partial x^{5}}\right] \\
&= \frac{1}{2}g^{\nu\mu}[\psi F_{\alpha\mu} - A_{\alpha}\partial_{\mu}\psi) \\
\tilde{\Gamma}^{\beta}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{\beta\alpha}\left[\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \tilde{g}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right] \\
&= \Gamma^{\beta}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\beta\alpha}[A_{\nu}\psi F_{\mu\alpha} + A_{\mu}\psi F_{\nu\alpha} + \\
&\qquad A_{\mu}A_{\nu}\partial_{\alpha}\psi]
\end{aligned}$$

Dengan adanya 6 simbol Christoffel yang tidak nol, dimungkinkan untuk diperoleh persamaan gerak geodesik dari metrik yang diberikan. Hubungan indentitas dari simbol Christoffel yang tidak nol adalah

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Gamma}^{5}_{55} + A_{\nu}\tilde{\Gamma}^{\nu}_{55} = 0 \\
&\tilde{\Gamma}^{\nu}_{\nu 5} + \tilde{\Gamma}^{5}_{55} = \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\alpha 5} = 0 \qquad (4)
\end{aligned}$$

Selanjutnya dihitung tensor Ricci 5D, di mana merupakan hasil dari penjumlahan dari potongan-potongan yang berbeda dalam koordinat 5D. Potongan-potongan tersebut adalah $\tilde{R}_{\mu\nu}, \tilde{R}_{\mu 5}, \tilde{R}_{55}$. Untuk menentukan tensor Ricci yang tidak nol, maka diungkapkan dengan persamaan

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{ab} = \tilde{R}^{c}_{acb} &= \frac{\partial \Gamma^{c}_{ab}}{\partial x^{c}} - \frac{\partial \Gamma^{c}_{ca}}{\partial x^{b}} \\
&\quad + \Gamma^{c}_{cd}\Gamma^{d}_{ab} - \Gamma^{c}_{bd}\Gamma^{d}_{ac} \qquad (5)
\end{aligned}$$

Dengan mempertimbangkan asumsi sebelumnya, bahwasanya tidak ada interaksi medan pada dimensi kelima, maka diperoleh hubungan identitas $\tilde{R}^{5}_{555} = 0$. Dengan demikian, tensor Ricci yang tidak bernilai nol adalah

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{55} &= \tilde{R}^{c}_{5c5} = \tilde{R}^{5}_{555} + \tilde{R}^{\nu}_{5\nu 5} \\
&= \partial_{\nu}\tilde{\Gamma}^{\nu}_{55} - \partial_{5}\tilde{\Gamma}^{\nu}_{\nu 5} + \tilde{\Gamma}^{\nu}_{5\nu}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{55} - \tilde{\Gamma}^{c}_{5\alpha}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{5c} \\
&= \frac{1}{4}\psi^{2}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + \frac{1}{4\psi}(\partial^{\nu}\psi)(\partial_{\nu}\psi) \\
&\quad -\frac{1}{2}\square\,\psi \qquad (6)
\end{aligned}$$

Di mana $\square = \partial^{\mu}\partial_{\mu} = \frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} - \nabla^{2}$ dinamakan *d'Alembertian* merupakan operator Laplace dalam ruang Minkowski dan $F_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}A_{\beta} - \partial_{\beta}A_{\alpha}$ merupakan tensor kuat medan elektromagnetik. Misalkan $\psi = \phi^{2}$, maka akan diperoleh hubungan alami dari suatu divergensi yang bentuknya

$$\tilde{R}_{55} = -\phi\,\square\,\phi + \frac{1}{4}\phi^{2}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \qquad (7)$$

Sama dengan sebelumnya, karena adanya asumsi $\partial_{5}\tilde{g}_{ab} = 0$, maka diperoleh identitas dari $\tilde{R}^{5}_{\alpha 55} = 0$, sehingga

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{\alpha 5} = \tilde{R}^{c}_{\alpha c 5} &= \tilde{R}^{5}_{\alpha 55} + \tilde{R}^{\nu}_{\alpha\nu 5} \\
&= \partial_{\nu}\tilde{\Gamma}^{\nu}_{\alpha 5} - \partial_{5}\tilde{\Gamma}^{\nu}_{\nu\alpha} + \tilde{\Gamma}^{\nu}_{\nu\beta}\tilde{\Gamma}^{\beta}_{\alpha 5} - \tilde{\Gamma}^{\nu}_{5\beta}\tilde{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\nu} \\
&= \frac{1}{2}\psi g^{\beta\mu}\partial_{\mu}F_{\alpha\beta} + \frac{3}{4}F_{\alpha\beta}\partial^{\beta}\psi + A_{\alpha}\tilde{R}_{55} \qquad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{\mu\nu} &= \tilde{R}^{5}_{\mu 5\nu} + \tilde{R}^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \\
&= \left(\partial_{5}\tilde{\Gamma}^{5}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\tilde{\Gamma}^{5}_{5\mu} + \tilde{\Gamma}^{5}_{5\beta}\tilde{\Gamma}^{\beta}_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^{5}_{\nu\beta}\tilde{\Gamma}^{\beta}_{\mu 5}\right) + \\
&\quad \left(\partial_{\alpha}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\alpha\mu} + \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\alpha\beta}\tilde{\Gamma}^{\beta}_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\beta}\tilde{\Gamma}^{\beta}_{\mu\alpha}\right) \\
&= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\phi^{2}g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} - \frac{1}{\phi}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi + \\
&\quad A_{\mu}A_{\nu}\tilde{R}_{55} + A_{\mu}\left(\tilde{R}_{\nu 5} - A_{\nu}\tilde{R}_{55}\right) + \\
&\quad A_{\nu}\left(\tilde{R}_{\mu 5} - A_{\mu}\tilde{R}_{55}\right) \qquad (9)
\end{aligned}$$

di mana $R_{\mu\nu}$ adalah tensor Ricci 4D.

Hal terakhir yang dicari sebelum mendapatkan tensor Einstein adalah kelengkungan skalar *(Ricci curvature)*, yang merepsentasikan bagian kelengkungan dari ruang-waktu yang menentukan sejauh mana materi akan cenderung menyatu atau divergen terhadap waktu. Dengan menjumlahkan persamaan (7), (8), dan (9), maka diperoleh ungkapan kelengkungan skalar untuk 5D, yakni

$$\tilde{R} = \tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu} + \tilde{g}^{\mu 5}\tilde{R}_{\mu 5} + \tilde{g}^{55}\tilde{R}_{55}$$

 E ISSN : 2776-6764
P ISSN : 2774-2032

$$= g^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu} + 2A^{\mu}\tilde{R}_{\mu 5} + \left(A^2 + \frac{1}{\psi}\right)\tilde{R}_{55}$$
$$= R - \frac{1}{4}\psi F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2\psi}\left(\partial_\mu\psi\right)(\partial^\mu\psi) - \frac{1}{\psi}\Box\,\psi$$
$$= R - \frac{1}{4}\phi^2 F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - \frac{2}{\phi}\Box\,\phi \quad (10)$$

dengan R adalah kelengkungan skalar pada 4D.

3. Tensor Einstein 5D

Pada bagian ini ditinjau persamaan medan Einstein yang diungkapkan $\tilde{G}_{ab} = \kappa\tilde{T}_{\mu\nu} \equiv \tilde{R}_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\tilde{R}$. Dalam diskusi ini, tidak terdapat sumber materi, akan tetapi tensor Einstein $\left(\tilde{G}_{ab}\right)$ akan tetap bergantung terhadap tensor energi momentum $\left(\tilde{T}_{ab}\right)$. Terjadinya kelengkungan ruang-waktu dikarenakan adanya sumber gravitasi dan sumber elektromagnet.

Selanjutnya ditinjau komponen-55 dari tensor Einstein yang diberikan oleh

$$\tilde{G}_{55} = \tilde{R}_{55} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\tilde{R}$$
$$= \frac{3}{8}\psi F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\psi R \quad (11)$$

Dalam hal ini, ψ menggambarkan kehadiran medan skalar. Untuk komponen campuran dari tensor Einstein, diungkapkan

$$\tilde{G}_{5\nu} = \tilde{R}_{5\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{5\nu}\tilde{R}$$
$$= \frac{1}{2}\psi g^{\alpha\beta}\partial_\beta F_{\nu\alpha} + \frac{3}{4}F_{\nu\alpha}\partial^\alpha\psi + A_\nu\tilde{R}_{55} - \frac{1}{2}A_\nu\left(R - \frac{1}{4}\phi^2 F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - \frac{2}{\phi}\Box\,\phi\right)$$
$$= \frac{1}{2}\psi g^{\alpha\beta}\partial_\beta F_{\nu\alpha} + \frac{3}{4}F_{\nu\alpha}\partial^\alpha\psi + A_\nu\tilde{G}_{55} \quad (12)$$

Sedangkan tensor Einstein untuk bagian ruang waktu $\left(\tilde{G}_{\mu\nu}\right)$, maka diberikan

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{R}$$
$$= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + A_\mu A_\nu\tilde{G}_{55} + A_\mu\left(\tilde{G}_{\nu 5} - A_\nu\tilde{G}_{55}\right) + A_\nu\left(\tilde{G}_{\mu 5} - A_\mu\tilde{G}_{55}\right) - \frac{1}{2}\psi\left(g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) - \frac{1}{2\psi}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\psi - g_{\mu\nu}\Box\,\psi\right)$$

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{1}{\phi}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\Box\,\phi\right) - \frac{1}{2}\phi^2\left(g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) + A_\mu A_\nu\tilde{G}_{55} + A_\mu\left(\tilde{G}_{\nu 5} - A_\nu\tilde{G}_{55}\right) + A_\nu\left(\tilde{G}_{\mu 5} - A_\mu\tilde{G}_{55}\right) \quad (13)$$

Dari 15 komponen persamaan medan yang diberikan, di mana keadaan waktu dari Kaluza-Klein pada keadaan vakum dipaksakan $\tilde{R}_{ab} = 0$ sehingga memberikan makna fisis, yakni suatu kontribusi metrik 4D dalam dunia 5D. Dengan demikian, persamaan (7-8) dapat dituliskan menjadi

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\phi^2\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{\phi}\phi_{\mu;\nu}$$
$$\nabla^\alpha F_{\alpha\beta} = -3\frac{\nabla^\alpha\phi}{\phi}\,F_{\alpha\beta}$$
$$\Box\,\phi = -\frac{\kappa\phi^3}{4}\,F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \quad (14)$$

Secara umum, hal ini dapat dianggap persamaan medan Einstein untuk kelengkungan ruang-waktu akibat hadirnya medan elektromagnet dan medan skalar. Selain itu, dari persamaan (14) bagian kedua, juga memenuhi persamaan Maxwell di mana sumber bergantung pada medan skalar, serta persamaan gelombangnya yang bergantung pada potensial skalarnya. Dengan demikian, teori Kaluza-Klein secara umum merupakan penyatuan terpadu dari gravitasi, elektromagnet dan medan skalar

Untuk dapat memberikan makna fisis dari persamaan (14), maka perlu ditinjau hubungan ketiga persamaan tersebut ke dalam kasus khusus untuk metrik 4D dan bentuk potensial elektromagnet. Bentuk metriknya adalah sebagai berikut:

$$ds^2 = e^\nu\,dt^2 - e^\lambda\,dr^2 - e^\mu r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right)$$
$$A_\alpha = (A_0, 0,0,0) \quad (15)$$

di mana $\nu, \mu, \lambda,$ adalah sebuah konstanta yang hanya bergantung pada r. Sedangkan bentuk potensial elektromagnetik (A_0) hanya bergantung pada t . Dengan demikian, bagian ketiga dari persamaan (14) dapat direduksi menjadi

$$\phi'' + \left(\frac{\nu' - \lambda' + 2\mu'}{2} + \frac{2}{r}\right)\phi' = \frac{1}{2}\phi^3 e^{-\nu}\left(A_0'\right)^2 \quad (16)$$

Bagian kedua dari persamaan (14) secara gamblang dapat dilakukan pengintegralan dan memberikan

$$A_0' = -\frac{C}{r^2\phi^3}\, e^{(\nu+\lambda+\mu)/2} \quad (17)$$

dengan C adalah suatu konstanta sembarang. Dari persamaan (17), maka dapat diperoleh perumusan bagian ketiga dari persamaan (14) yang memberikan 3 relasi, yakni

$$\nu'' + \nu'\left(\frac{\nu'-\lambda'+2\mu'}{2} + \frac{2}{r}\right) = -\frac{\phi'}{\phi}\nu' - \phi^2 e^{-\nu}(A_0')^2$$

$$\nu'' + 2\mu'' + \frac{(\nu')^2+2(\mu')^2-\lambda'(\nu'+2\mu')}{2} + \frac{4\mu'-2\lambda'}{r} = -\phi^2 e^{-\nu}(A_0')^2 - \frac{2}{\phi}\left(\phi'' - \frac{\lambda'}{2}\phi'\right)$$

$$1 - \frac{1}{2}e^{\mu-\lambda}r^2\left[\mu'' + \frac{\mu'(\nu'-\lambda'+2\mu')}{2} + \frac{\nu'-\lambda'+4\mu'}{r} + \frac{2}{r^2}\right] = \frac{1}{2}e^{\mu-\lambda}\, r^2\left(\mu' + \frac{2}{r}\right)\frac{\phi'}{\phi} \quad (18)$$

Dari 5 persamaan (16-18) merupakan suatu solusi yang saling berhubungan dan belum diketahui kuantitas dari konstanta $\phi, A_0, \nu, \lambda,$ dan μ.

4. Kesimpulan

Studi yang telah dilakukan merupakan analisis matematis untuk melihat ruang-waktu 5D Kaluza-Klein tanpa adanya sumber (distribus materi) dapat direduksi menjadi persamaan medan Einstein 4D seperti yang telah ditelaah pada persamaan (13). Selain itu, untuk ruang-waktu 5D Kaluza-Klein dalam keadaan vakum ($\tilde{R}_{ab} = 0$) , memberikan makna fisis bahwasanya persamaan medan Einstein eksis dari adanya kelengkungan ruang-waktu akibat hadirnya medan elektromagnet dan medan skalar. Selain itu, dari persamaan (14) bagian kedua, juga memenuhi persamaan Maxwell di mana sumber bergantung pada medan skalar, serta persamaan gelombangnya yang bergantung pada potensial skalarnya. Namun diperlukan adanya studi yang lebih terperinci terkait persamaan (18) diperlukan untuk melihat seberapa jauh sifat-sifat dimensi hipotetis, kehadiran medan skalar sebagai partikel dilaton yang dapat dikaitkan dengan sifat-sifat materi yang nyata.

Daftar Pustaka

[1] Einstein, Albert, *"The Foundation of the General Theory of Relativity",* Annalen der Physik. **354** (7), pp. 769, 1916.

[2] Kaluza, Theodor, *"Zum Unitätsproblem in der Physik".* Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.), pp. 966–972, 1921.

[3] Klein, Oskar, *"Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie".* Zeitschrift für Physik A. **37** (12), pp. 895–906, 1926.

[4] Klein, Oskar, *"The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory Law".* Nature. **118** (2971), pp. 516, 1926.

[5] A. Einstein dan P. Bergmann, *"On a generalization of Kaluza's theory of electricity"*, Ann. Math. **39** (1938), pp. 683, 1938.

[6] A. Einstein dan W. Pauli, *"On the non-existence of regular stationary solutions of relativistic field equations"*, Ann. Math. **44**, pp.131, 1943

[7] P. Jordan, *"Erweiterung der projektiven Relativitgtstheorie"*, Ann. Phys. (Leipzig) **1**, pp. 219, 1947.

[8] P. Bergmann, *"Unified field theory with fifteen field*

E ISSN : 2776-6764
P ISSN : 2774-2032

variables", Ann. Math. **49**, pp. 255, 1948.

[9] Y. Thiry, "*Les equations de la theorie unitaire de Kaluza*", Comptes Rendus Acad. Sci. (Paris) **226**, pp. 216, 1948.

[10] J. M. Souriau, *"Une axiomatique relativiste pour la microphysique"*, Comptes Rend. Acad. Sci. (Paris) **247**, pp. 1559, 1958.

[11] J. M. Souriau, *"Five-dimensional relativity"*, Nuovo Cimento **30**, pp. 565, 1963.

[12] B. De Witt, "*Dynamical theory of groups and fields*", in: Relativity, Groups and Topology, eds. C. De Witt and B. de Witt (Gordon & Breach, New York) pp. 725, 1964.

[13] J. Rayski, "*A unified description of space-time and isospace*", Acta Phys. Pol. **27**, pp.947, 1965.

[14] R. Kemer, *"Generalization of the Kaluza-Klein theory for an arbitrary non-abelian gauge group"*, Ann. Inst. Henri Poincark **9**, pp.143, 1968

[15] A. Trautman, *"Fibre bundles associated with space-time"*, Rep. Math. Phys. **1**, pp. 29, 1970.

[16] Y.M. Cho, "*Higher-dimensional unifications of gravitation and gauge theories*", J. Math. Phys. **16**, pp. 2029, 1975.

[17] Y.M. Cho dan P.G.O. Freund, *"Non-Abelian gauge fields as Nambu-Goldstone fields"*, Phys. Rev. D **12**, pp. 1711, 1975.

[18] T. Mirzaev, A. B. Abdikamalov, dan A. A. Abdujabbarov, dkk., "Observational Appearence of Kaluza-Klein Balck Holes", General Relativity and Quant. Cosm. **1,** 2022.