DEWANTARA. J. Tech., Vol. 02, No. 01 (Mei 2021), Hal. 73 - 81
E ISSN : 2776-6764
P ISSN : 2774-2032

Simulasi dan Analisis Numerik Orbit Planet dengan MatLab

Muh. Fachrul Latief -1[a*], A. Indra Wulan Sari Ramadani-2[a], Siti Fatimah-3[b]

[a] Prodi Fisika, Jurusan Fisika, FIMPA, Universitas Negeri Gorontalo,
Jalan Prof. Dr. Ing B.J. Habibie, Desa Moutong Kec. Tilongkabila, Kab. Bone Bolango, Gorontalo, Indonesia
[b] Prodi Elektronika, Akademi Teknologi Industri Dewantara Palopo,
Jalan K.H. Ahmad Razak 2 No. 7, Kota Palopo, Indonesia

*Email : muh.fachrul@ung.ac.id

Abstrak

Dalam studi ini, telah ditelaah orbit planet sesuai dengan Hukum Kepler yang menyebutkan bahwasanya bentuk lintasan planet berbentuk elips dengan eksentirisitas tertentu. Studi lebih difokuskan pada perbandingan metode Euler, metode Euler-Cromer, metode Runge-Kutta orde-2 dan metode Runge-Kutta orde-4 dalam menyelesaikan kasus orbit planet dengan variasi step-waktu dan variasi kecepatan awal orbit planet dalam satuan *Astronomical Unit* (AU)/tahun. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwasanya metode yang lebih presisi dalam menjelaskan masalah orbit planet adalah metode Runge-Kutta orde-4 dengan keakuratan yang lebih baik. Selain itu, studi tersebut juga berhasil memodelkan orbit dari planet Terrestrial dengan rentang $0.2\pi - 2.0\pi$ AU/tahun

Kata Kunci : *Hukum Kepler, Metode Euler, Metode Euler-Cromer, Metode Runge-Kutta orde-2, Metode Runge-Kutta orde-4*

1. Latar Belakang

Dalam ilmu astronomi, heliosentris merupakan model astronomi yang di mana planet-planet cenderung bergerak mengelilingi matahari. Hal ini diperkuat oleh seorang ahli matematiaka dan astronomi dari Jerman yang bernama Johanes Kepler (1571 – 1630) yang mengemukakan bahwasanya lintasan planet dalam mengelilingi matahari berbentuk elips melalui hukum Kepler I. Selain itu, dia juga berhasil menunjukkan bahwsasanya planet tidak bergerak dengan kelajuan konstan, akan tetapi planet akan bergeak lebih cepat ketika berada dekat matahari dan akan bergerak lambat ketika berada jauh dari matahari.

Pada umumnya, pergerakan planet dan benda-benda langit memerlukan pendekatan komputasi dan analisis numerik dalam menjelaskan orbitnya dalam mengitari matahari. Pada tahun 1993, Petit dan Farinella [1] telah membangun algoritma yang berhasil menjelaskan tumbukan asteroid dengan kecepatan yang tinggi serta adanya gangguan terhadap arah radialnya. Bentuk lintasan orbit juga dapat ditelaah dengan melakukan simulasi Monte-Carlo berdasarkan data yang diperoleh dari detektor Horizonnya [2]. Selain itu, penentuan konfigurasi dinamika yang stabil berdasarkan gerak spin objek dengan kecepatan maksimum dari beberapa parameter kecepatan, gravitasi dan massanya telah ditelaah oleh C.Stefano [3]. Dalam pergerakan mode tunggal, aproksimasi Lei *et al.* (2018) menunjukkan bahwasanya ekspansi polinomial dapat menggambarkan dan menentukan keadaan

awal untuk gerakan mode tunggal di sekitar titik kesetimbangannya [4]. Selanjutnya, pada tahun 2021, Keithly and Savransky [5] telah menemukan planet ekstrasurya yang berskala besar melalui pencitraan. Selain itu, mereka juga berhasil menemukan karakterisasi dari planet ekstrasurya tersebut yang menyerupai bumi dan sistem bintang yang sesuai dengan sistem tata surya kita.

Dalam studi ini, akan difokuskan pada analisis orbit planet untuk sistem benda tunggal dan bintang berdasarkan nilai posisi awal dan kecepatan awal melalui proses diiterasi. Scheeres (2009) telah menelaah bahwasanya sistem yang tidak melebihi lima benda yang saling berinteraksi satu sama lain akan menghasilkan konfigurasi yang stabil [6]. Pemodelan komputasi dan analisis numerik untuk masalah orbit planet didasarkan persamaan Kepler yang diturunkan dari hukum Gravitasi Newton konvensional. Dari persamaan tersebut, maka dibentuk diskritisasi untuk masalah persamaan Kepler dengan metode ekstrapolasi spesial dan integrasi numerik [7]. Akan tetapi, bentuk diskrit yang efisien masih belum diuji daan sampai sekarang menjadi hambatan dalam menggunakan solusi ini.

Secara numerik, penyelesaian persamaan Kepler telah ditelaah melalui beberapa metode, seperti metode Newton-Raphson [8], metode Laguerre-Conway [9], serta metode iterasi Newton yang memiliki konvergensi menuju nol untuk $e \rightarrow 0$ [10]. Dalam paper ini, telah ditinjau beberapa metode lain dalam menjelaskan orbit planet berdasarkan variasi step-waktu orbit dan variasi kecepatan awal planet mengorbit. Selain itu, simulasi yang dilakukan telah berhasil menjelaskan dan memvisualisasikan orbit planet Terrestrial dalam mengelilingi matahari.

2. Kajian Teori

Hukum Gravitasi (Gravitational Law) Newton merupakan salah satu hukum yang fundamental dalam ilmu fisika yang menjelaskan bahwapada hakikatnya bila ada dua massa, yakni masing-masing m dan M yang berada pada jarak r, maka akan ada gaya interaksi antara kedua massa tersebut yang diungkapkan dengan persamaan :

$$\bar{F} = -G\frac{mM}{|r^3|}\bar{r} \qquad (1)$$

di mana

G = tetapan gravitasi = $6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3/Kg.s^2$
m, M = massa benda (Kg)
r = jarak antara kedua benda (m)

Semua planet termasuk Bumi, bintang, dan komet serta semua benda-benda langit akan mengikuti hukum gravitasi. Walaupun pada akhirnya hukum ini direvisi oleh Albert Einstein dengan memasukkan unsur relativitas yang lebih dikenal dengan teori relativitas umum

Gerak planet telah diamati selama berabad-abad tahun yang lalu oleh ilmuan yang terkenal di zamannya, yakni Copernicus yang menyimpulkan bahwasanya planet-planet bergerak mengelilingi matahari. Selanjutnya teori tersebut diperkuat oleh seorang matematika dan astronomi yang berhasil menyimpulkan bahwa orbit planet berbentuk elips berdasarkan data-data yang diperoleh. Selanjutnya, Kepler mengemukakan tiga buah hukum, yaitu :

1. Setiap planet yang mengorbit matahari memiliki lintasan elips di mana matahari berada pada salah satu titik fokusnya.
2. Vektor radius dari matahari ke planet yang mengorbit akan menyapu luasan yang sama pada interval waktu yang sama.
3. Kuadrat dari periode (waktu edar) dari dua planet berbending langsung dengan pangkat tiga dari orbit planet tersebut.

Hal pertama, semua persamaan gerak dapat diturunkan dari persamaan energinya, yakni:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} \qquad (2)$$

Dengan meninjau orbit planet yang berbentuk lingkaran, maka gaya sentripetal akan berpengaruh dalam sistem tersebut. Gaya sentripetal akan seimbang dengan gaya gravitasinya, sehingga :

$$\frac{n.v^2}{r} = G\frac{m\,M}{r^2} \qquad (3)$$

atau

$$v = \sqrt{\frac{G\,M}{r}} \qquad (4)$$

Selanjutnya, subtitusi persamaan (4) ke dalam persamaan (2) sehingga memberikan ungkapan energi orbit planet, yakni:

$$E = -\frac{G\,m\,M}{2r} \qquad (5)$$

Apabila lintasan planet berbentuk elips, maka r dapat diganti dengan a sebagai radius terpanjang dari bentuk elipsnya. Dengan demikian, persamaan (5) menjadi

$$E = -\frac{G\,m\,M}{2\,a} \qquad (6)$$

Dengan melakukan subtitusi persamaan (6) ke persamaan (2), maka ungkapan kecepatan orbital planetnya adalah

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \qquad (7)$$

Selanjutnya dengan menggunakan hukum kekekalan momentum, maka diperoleh periode orbit planet, yakni :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}\,a^3 \qquad (8)$$

yang tidak lain merupakan hukum Kepler 3.

a. Orbit Planet dengan Metode Euler

Metode euler merupakan metode penyelesaian persoalan nilai awal yang paling sederhana dengan tingkat ketelitian yang rendah, yaitu $O(h^2)$ karena dibangun dari ekspansi deret Taylor orde-1 yang mengabaikan orde-2 dan orde yang lebih tinggi. Mengingat persamaan persamaan Kepler merupakan persamaan diferensial biasa, maka digunakanlah aproksimasi metode Euler dalam menyelesaiakan kasus tersebut. Persamaan gerak planet denga metode Euler dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$v(t+h) = v(t) + h * a(r,v) \qquad (9.a)$$

$$r(t+h) = r(t) + h * v(t) \qquad (9.b)$$

Di mana percepatan dari orbit planet diungkapkan

$$a(r,v) = -GM * \frac{r}{|r|^3} \qquad (10)$$

b. Orbit Planet dengan Metode Euler-Cromer

Metode Euler-Cromer merupakan modifikasi dari metode Euler dalam menjelaskan orbit planet. Persamaan tersebut dimodifikasi menjadi

$$v_{n+1} = v_n + h * a_n$$
$$r_{n+1} = r_n + h * v_{n+1}$$

Di mana hasil $v(t+h)$ langsung digunakan untuk menghitung $r(t+h)$. Sedangkan ungkapan untuk percepatan dari orbit planet sama pada persamaan (10) sebelumnya. Dengan demikian, hasil program juga akan termodifikasi dengan menukar tempat antara $r = r + h * v$ dengan $v = v + h * a$.

c. Orbit Planet dengan Metode Runge-Kutta Orde-2

Metode Runge-Kutta dikembangkan oleh Carl Runge dan Wilhelm Kutta dengan menggunakan ekspansi deret Taylor hingga orde-2 tanpa harus melakukan diferensial analitik berulang kali. Pada umumnya, formula dari Runge-Kutta orde-2 adalah sebagai berikut:

$$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{2}(K1 + K2)$$

di mana :

$$K1 = h * f\big(t, x(t)\big)$$
$$K2 = h * \big(f(t+h, x(t) + h * K1)\big)$$

d. Orbit Planet dengan Metode Runge-Kutta Orde-4

Seperti halnya dengan metode Runge-Kutta orde-2, metode Runge-Kutta orde-4 menggunakan ekspansi deret Taylor orde-4 sehingga nilai error terhadap nilai analitiknya sangat kecil dibanding dengan 3 metode sebelumnya. Formula untuk

E ISSN : 2776-6764
P ISSN : 2774-2032

metode Runge-Kutta orde-4 adalah sebagai berikut :

$$x(t+h) = x(t) + h * \frac{K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4}{6}$$

Di mana :

$$K1 = f(t, x)$$
$$K2 = f\left(t + {}^1/_2\, h, x + {}^1/_2\, h * K1\right)$$
$$K3 = f\left(t + {}^1/_2\, h, x + {}^1/_2\, h * K2\right)$$
$$K4 = f(t + h, x + h * K3)$$

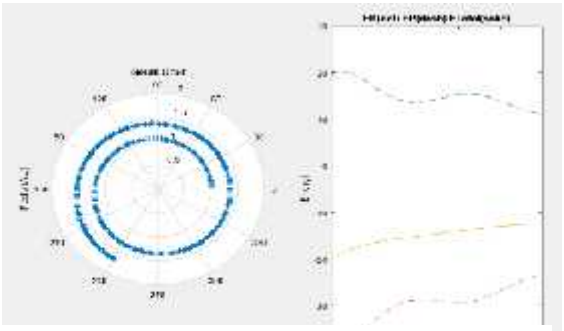
Pada metode ini, planet yang akan diteliti yaitu planet Terrestrial. Variasi yang akan di berikan yaitu :

- Variasi kecepatan rerata orbit dalam satuan (AU)/tahun untuk setiap planet
- Variasi step-waktu setiap planet dalam satuan tahun. Variasi ini digunakan untuk perbandingan dengan metode Euler., metode Euler-Cromer, dan metode Runge-Kutta orde-2.

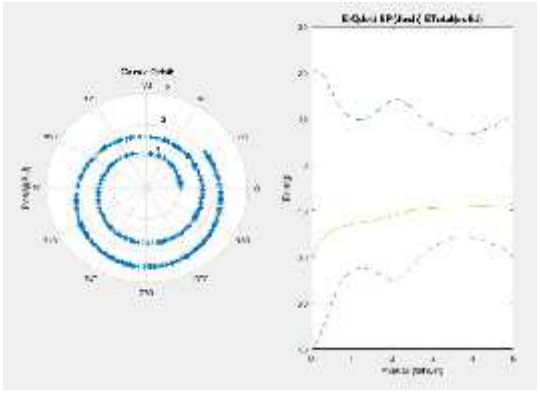
Setelah grafik didapatkan dari kedua metode di atas, kami menganalisa dari grafik yang telah didapat.

3. Hasil dan Pembahasan

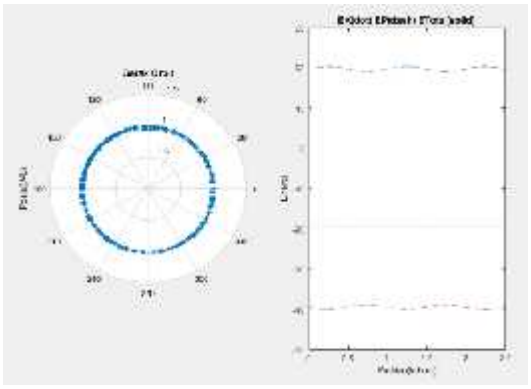
Pertama, akan dibahas perbandingan dari metode Euler, metode Euler-Cromer, metode Runge-Kutta orde-2 dan metode Runge-Kutta orde-4 pada kecepatan awal $2.0\,\pi$ AU/tahun dengan variasi step-waktu terhadap posisi planet dalam AU. Hasil perbandingannya adalah



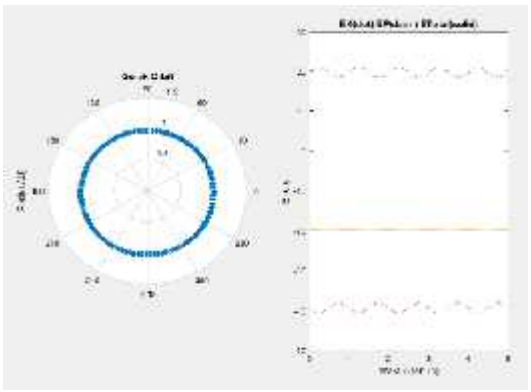
Gambar 1.a Orbit planet dengan metode Euler pada variasi step-waktu = 0.005



Gambar 1.b Orbit planet dengan metode Euler pada variasi step-waktu = 0.01

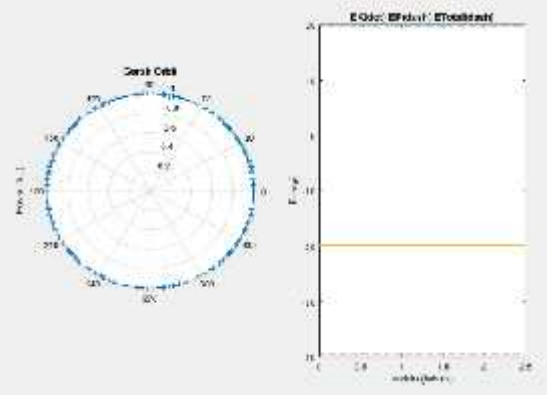


Gambar 2.a Orbit planet dengan metode Euler-Cromer pada variasi step-waktu = 0.005

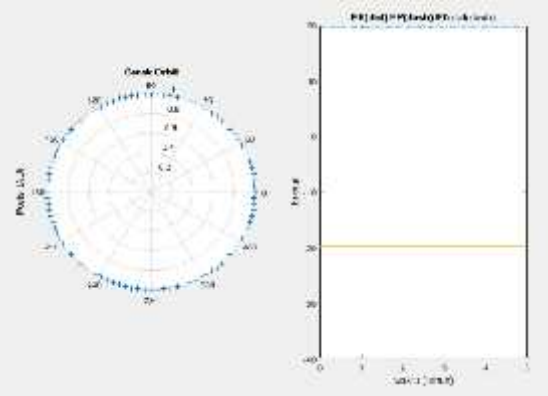


Gambar 2.b Orbit planet dengan metode Euler-Cromer pada variasi step-waktu = 0.01

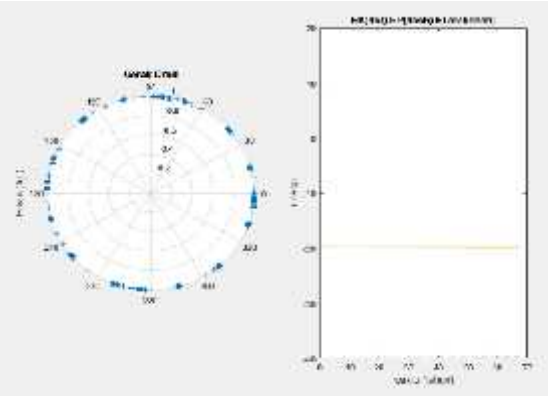
E ISSN : 2776-6764
P ISSN : 2774-2032



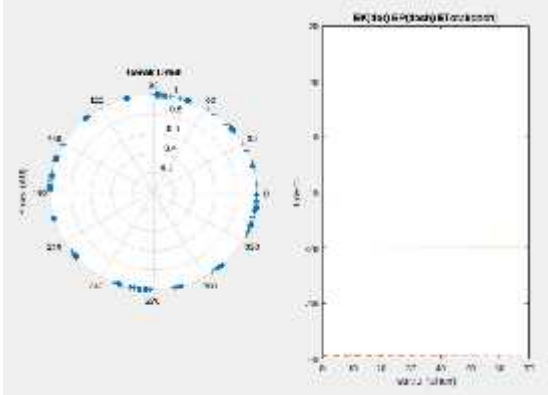
Gambar 3.a Orbit planet dengan metode Runge-Kutta orde-2 pada variasi step-waktu = 0.005



Gambar 3.b Orbit planet dengan metode Runge-Kutta orde-2 pada variasi step-waktu = 0.01

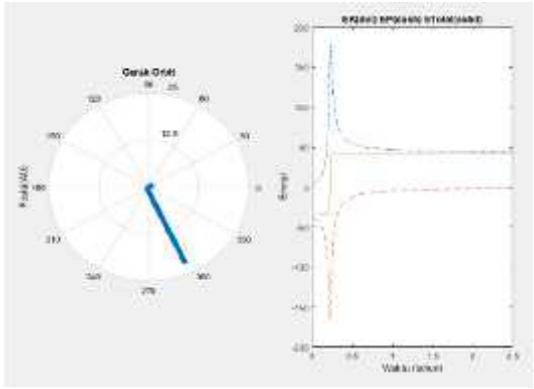


Gambar 4.a Orbit planet dengan metode Runge-Kutta orde-4 pada variasi step-waktu = 0.005

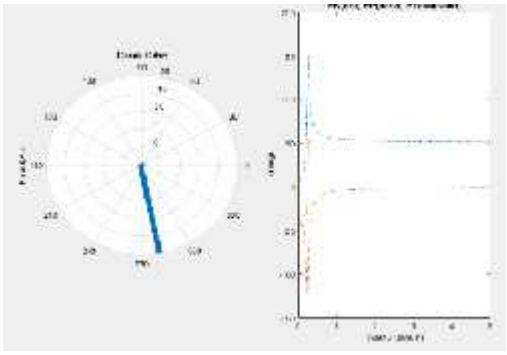


Gambar 4.b Orbit planet dengan metode Runge-Kutta orde-4 pada variasi step-waktu = 0.01

Selanjutnya akan ditinjau orbit planet dengan kecepatan awal $1.0\,\pi$ AU/tahun dari keempat metode tersebut. Hasil perbandingannya adalah

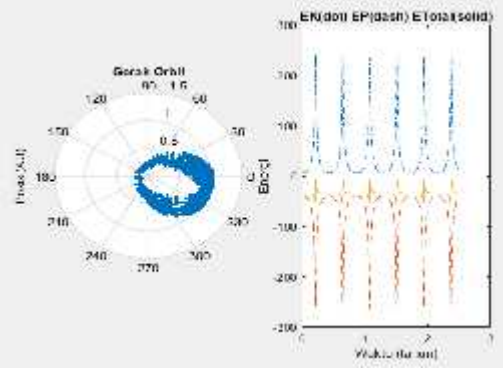


Gambar 5.a Orbit planet dengan metode Runge-Kutta orde-4 pada variasi step-waktu = 0.005

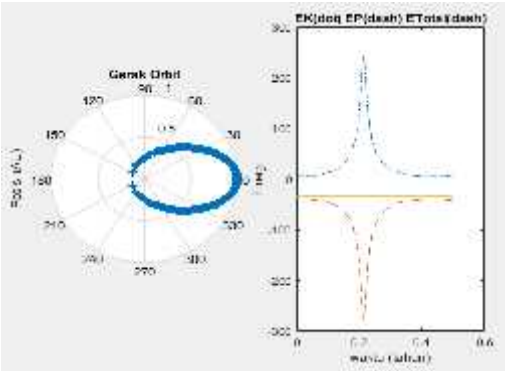


Gambar 5.b Orbit planet dengan metode Runge-Kutta orde-4 pada variasi step-waktu = 0.01

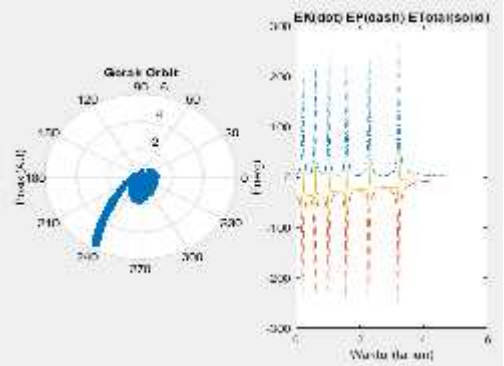
E ISSN : 2776-6764
P ISSN : 2774-2032



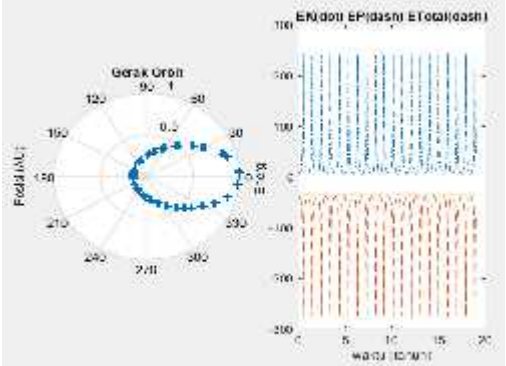
Gambar 6.a Orbit planet dengan metode Euler-Cromer pada variasi step-waktu = 0.005



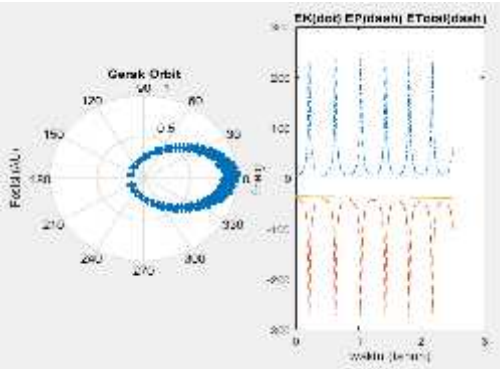
Gambar 7.b Orbit planet dengan metode Runge-Kutta orde-2 pada variasi step-waktu = 0.01



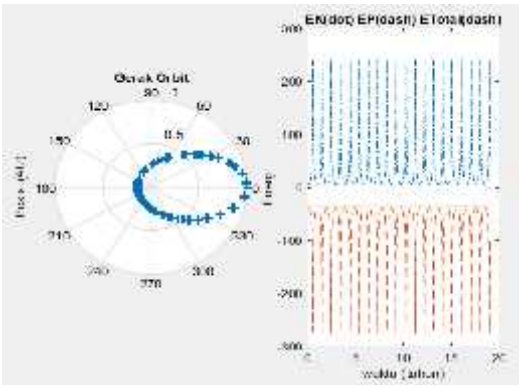
Gambar 6.b Orbit planet dengan metode Euler-Cromer pada variasi step-waktu = 0.01



Gambar 8.a Orbit planet dengan metode Runge-Kutta orde-4 pada variasi step-waktu = 0.005



Gambar 7.a Orbit planet dengan metode Runge-Kutta orde-2 pada variasi step-waktu = 0.005



Gambar 8.b Orbit planet dengan metode Runge-Kutta orde-4 pada variasi step-waktu = 0.01

Dari gambar di atas, ada beberapa point yang dapat disimpulkan dengan perlakuan variasi kecepatan awal terhadap step-waktu. Metode Euler tidak terlalu presisi dalam menggambarkan bentuk orbit planet karena hasil yang diperoleh dalam bentuk spiral. Hal ini diakibatkan karena adanya total energi yang tidak konstan, akan tetapi terus bertambah. Seandainya planet mengikuti orbit ini berarti semakin lama periode orbit planet, maka semakin jauh dari matahari dan tidak akan kembali lagi ke matahari sebagai pusat dari sistem tata surya.

Karena kegagalan metode Euler dalam memprediksi orbit planet, maka metode Euler dikembangkan menjadi metode Euler dengan modifikasi komputasi perhitungan kecepatan lintasan orbit planet (v) yang didahulukan. Dengan kata lain, komputasi lintasan (r) dapat dihitung setelah komputasi kecepatan orbit planet. Hasil yang diperoleh pada metode ini adalah lintasan orbit planet berbentuk bulat penuh. Dengan demikian, metode Euler-Cromer juga gagal dalam memprediksi orbit planet yang berbentuk elips sesuai dengan persamaan Kepler. Selain itu, metode Euler dan metode Euler-Cromer juga gagal memprediksi orbit planet untuk kasus kecepatan sudut awal yang lebih rendah karena bentuk orbit yang dihasilakn bukan lagi berbentuk elips maupun lingkaran.

Berbeda hal dengan metode Range-Kutta orde-2 dan orde-4 yang tetap konsisten menampilkan lintasan orbit planet berbentuk lingkaran pada kasus kecepatan orbit yang lebih besar dan lintasan orbit planet berbentuk elips pada kasus kecepatan orbit yang lebih rendah. Perbedaan metode Range-Kutta orde-2 dan orde-4 adalah pada metode Range-Kutta orde-2 perulangan yang seragam yang menandakan kecepatan orbit seragam, sedangkan pada metode Range-Kutta orde-4 terlihat perulangan lebih banyak pada posisi *perihelion* (dekat matahari) dibanding posisi *aphelion* (jauh matahari). Hal ini menandakan bahwa kecepatan orbit planet lebih cepat pada posisi *perihelion* dibanding pada posisi *aphelion*.

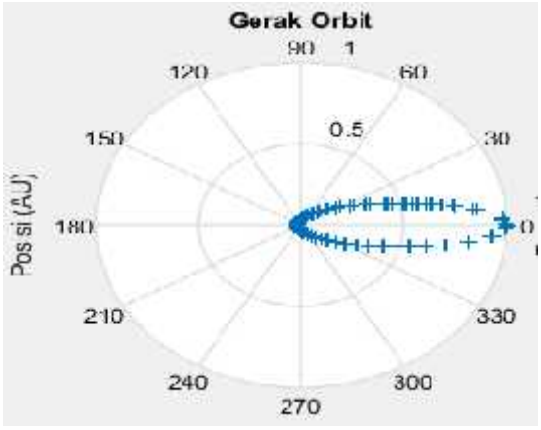
Selanjutnya akan dibahas orbit planet Terrestrial dengan menggunakan metode Range-Kutta orde-4 yang lebih presisi. Pada kasus ini, kita memilih step-waktu yang seragam yakni 0.004 dengan melakukan variasi terhadap kecepatan awal orbit planet. Adapun data planet yang digunakan dalam melakukan simulasi dan sesuai dengan Hukum Kepler III [11] adalah tabel di bawah ini

Tabel 1. Data Planet yang digunakan dalam Hukum Kepler III

Planet	Jarak Rata-Rata dari Matahari (AU)	Periode (Earth Years)
Merkurius	0,387	0,241
Venus	0,723	0,615
Bumi	1,0	1,0
Mars	1,523	1,88
Jupiter	5,202	11,86
Saturnus	9,539	29,5
Uranus	19,18	84
Neptunus	30,06	165

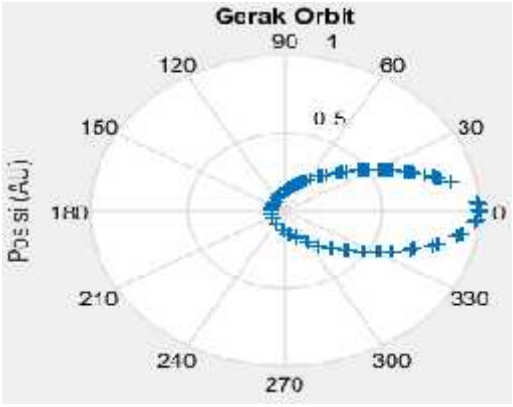
Sumber: Dehnen, W., dan J.I. Read

Hasil simulasinya adalah

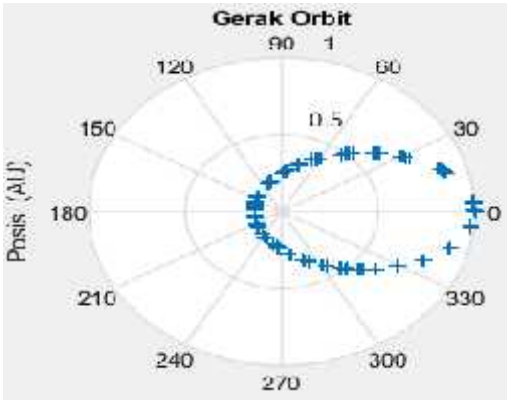


Gambar 9. Orbit planet Merkurius dengan kecepatan awal orbit 0.387 AU/tahun dan step-waktu $= 0.004\pi$

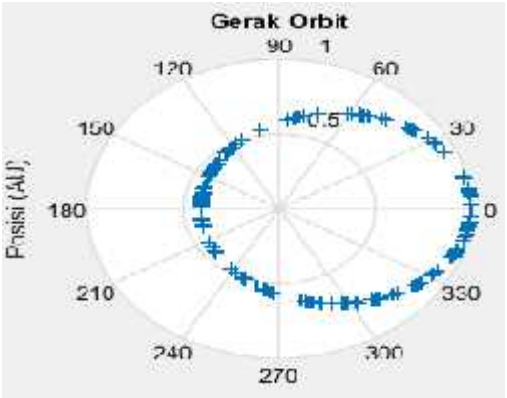
E ISSN : 2776-6764
P ISSN : 2774-2032



Gambar 10. Orbit planet Venus dengan kecepatan awal orbit 0.723 AU/tahun dan step-waktu = 0.004π



Gambar 11. Orbit planet Bumi dengan kecepatan awal orbit 1.0 AU/tahun dan step-waktu = 0.004π



Gambar 12. Orbit planet Mars dengan kecepatan awal orbit 1.523 AU/tahun dan step-waktu = 0.004π

Hasil komputasi yang diberikan adalah orbit planet-planet Terrestrial bersesuaian dengan hukum Kepler III pada berbagai kecepatan berdasarkan tabel 1. Di mana energi kinetik (kecepatan planet) lebih tinggi pada posisi *perihelion* dibanding pada posisi *aphelion* dengan lintasan planet yang berbentuk elips. Keadaan stabil untuk menggambarkan orbit planet Terrestrial berada pada rentang kecepatan awal $0.2\pi - 2.0\pi$ AU/tahun. Untuk kecepatan orbit planet di atas 2.0π, maka bentuk orbitnya berupa bulat penuh sehingga tidak terlalu presisi. Dengan demikian, metode Runge-Kutta orde-4 tidak mampu menjelaskan dengan baik orbit planet untuk planet-planet Jovian.

4. Kesimpulan

Hasil simulasi orbit planet yang diperoleh dengan beberapa metode yang digunakan menunjukkan bahwa metode Runge-Kutta orde-4 lebih presisi dalam memprediksi orbit planet-planet Terrestrial yang berbentuk elips sesuai hukum Kepler III dibanding metode lainnya. Selain itu, metode Runge-Kutta orde-4 mampu menunjukkan bahwa kecepatan planet akan meningkat pada posisi *perhihelion* dibandingkan posisi *aphelionnya*. Keadaan stabil dari metode Runge-Kutta orde-4 dalam melakukan simulasi berada pada rentang kecepatan awal dari $0.2\pi - 2.0\pi$ AU/tahun yang bersesuaian dengan kecepatan untuk planet-planet Terrestrial.

Daftar Pustaka

[1]. J.M. Petit, F. Paolo. Modelling the outcomes of high-velocity impacts between small solar system bodies. *Springer. Celest. Mech. Dyn. Astr.* Vol. 57 (1993) pp. 1-28.

[2]. D. J. Scheeres, Stability of the Euler resting N-body relative equilibria. *Springer. Celest Mech. Dyn. Astr.* Vol. 130 No. 26 (2018).

[3]. C, Stefano. 1991. Position and velocity perturbations in the orbital

frame in terms of classical element perturbations. *Springer. Celest. Mech. Dyn. Astr.* Vol. 55 (1991) pp. 209-221.

[4]. H. L. Lei, B. Xu, dan C. Circi. Polynomial expansions of single-mode motions around equilibrium points in the circular restricted three-body problem. *Springer. Celest. Mech. Dyn. Astr.* Vol. 130 No. 38 (2018).

[5]. D.R. Keithly and D. Savransky. The Solar System as an Exosystem: Planet Confusion. *American Astronomy Society, The Astrophysical Journal Letters*. Vol. 919 No. 1 (2021).

[6]. D.J. Scheeres. Stability of the planar full 2-body problem. *Springer. Celest. Mech. Dyn. Astr*. Vol. 104 (2009) pp. 103-128.

[7]. P. Deuflhard. Kepler discretization in regular celestial mechanics. *Reider. Celestial Mechanics.* Vol. 21 (1980) pp. 213-223.

[8]. W. Edward. A general algorithm for the solution of Kepler's equation for elliptic orbits. *Reider. Celestial Mechanics.* Vol. 20 (1979) p. 243-249.

[9]. J. M. A. Danby. The solution of Kepler's equation III. *Reidel. Celestial Mechanics.* Vol. 40 (1987) p. 303-312

[10]. A. Elipe et al.. An analysis of the convergence of newton iterations for solving elliptic Kepler's equation. *Elsevier. Celest. Mech. Dyn. Astr*. Vol. 129 (2017) p.415-432.

[11]. Dehnen, W., dan J.I. Read. N-body Simulations of Gravitational Dynamics. *European Physics Journal Plus.* Vol. 126 (2011).